

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
ADOLF HAIMOVICI
Etapa locală-9 februarie 2013

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

Barem Clasa X

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 2x + 4, & x \in (-\infty, 1] \\ mx + 4, & x \in (1, \infty) \end{cases}$.

a) Pentru $m = -2$ trasați graficul funcției

b) Determinați $m \in \mathbb{R}$, pentru care funcția este surjectivă.

Soluție:

- a) trasarea corectă a graficului.....4p
- b) Restricția funcției f la intervalul $(-\infty, 1]$ este $2x+4$, o funcție crescătoare care are ca imagine intervalul $(-\infty, 6]$0,5p
- Funcția f este surjectivă dacă și numai dacă restricția $mx+4$ a funcției f la intervalul $(1, \infty)$, are ca imagine o mulțime, care reunită cu $(-\infty, 6]$ să ne dea \mathbb{R}0,5p
- Este necesar ca $m > 0$ 0,5p
- În acest caz imaginea restricției este $(m + 4, \infty)$0,5p
- $m + 4 \leq 6 \Rightarrow m \leq 2$0,5p
- Deci $m \in (0, 2]$0,5p

2. Determinați numerele reale x, y, z pentru care

$$\sqrt{x - 2012} + \sqrt{y + 2013} + \sqrt{z - 2014} = \frac{x+y+z-2010}{2}.$$

Soluție:

Condiții de existență pentru radicali: $x \geq 2012, y \geq -2013, z \geq 2014$1p

Folosim inegalitatea mediilor pentru numerele 1 și $x-2012$, 1 și $y+2013$ respectiv 1 și $z-2014$

$$\sqrt{1 \cdot (x - 2012)} \leq \frac{1+x-2012}{2} = \frac{x-2011}{2}.$$

$$\sqrt{1 \cdot (y + 2013)} \leq \frac{1+y+2013}{2} = \frac{y+2014}{2}.$$

$$\sqrt{1 \cdot (z - 2014)} \leq \frac{1+z-2014}{2} = \frac{z-2013}{2}.$$
.....1p

Adunând relațiile obținem $\sqrt{x - 2012} + \sqrt{y + 2013} + \sqrt{z - 2014} \leq \frac{x+y+z-2010}{2}$ 1p

Egalitatea are loc doar când inegalitatea mediilor este egalitate, ceea ce se întâmplă atunci când numerele sunt respectiv egale.....1p

Deci $1 = x - 2012 \Rightarrow x = 2013$1p

$1 = y + 2013 \Rightarrow y = -2012$1p

$1 = z - 2014 \Rightarrow z = 2015$1p

3. a) Așezați în ordine crescătoare numerele $1, \frac{1}{2} \ln 4, \ln(\sqrt[3]{27}), \pi$.

b) Fie a, b, c trei numere reale mai mari ca 1. Să se afle valoarea minimă a expresiei

$$E = \log_a(bc) + \log_b(ca) + \log_c ab.$$

Soluție:

a) $1 = \ln e, \frac{1}{2} \ln 4 = \ln 2, \ln(\sqrt[3]{27}) = \ln 3, \pi = \ln(e^\pi)$ 1p

Deci $\frac{1}{2} \ln 4 < 1 < \ln(\sqrt[3]{27}) < \pi$ 1p

b) $E = \log_a b + \log_a c + \log_b c + \log_b a + \log_c a + \log_c b$1p

$$= \log_a b + \frac{1}{\log_a b} + \log_b c + \frac{1}{\log_b c} + \log_c a + \frac{1}{\log_c a} \dots 1p$$

Deoarece a, b, c sunt mai mari ca 1 atunci $\log_a b, \log_b c, \log_c a$ sunt numere reale pozitive.....1p

Se aplică inegalitatea $x + \frac{1}{x} \geq 2$, pentru orice x real pozitiv.....1p

Deci $E \geq 6$1p

4. a) Rezolvați în numere reale ecuația $3^x - 2^x = 19$.

b) Rezolvați în numere reale sistemul $\begin{cases} 3^x - 2^y = 19 \\ 3^y - 2^x = 19 \end{cases}$.

Soluție:

a) se observă că $x=3$ este soluție a ecuației date.....1p

$$3^x = 2^x + 19$$

$$1 = \left(\frac{2}{3}\right)^x + \frac{19}{3^x} \dots 1p$$

folosind monotonia funcției exponențiale soluția este unică.....1p

b) prin scăderea celor două ecuații se obține $3^x - 2^y - 3^y + 2^x = 0$

$$3^x + 2^x = 3^y + 2^y \dots 1p$$

funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3^x + 2^x$ este strict crescătoare deci injectivă.....1p

atunci din $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$1p

înlocuind y cu x se obține ecuația de la punctul a) $3^x - 2^x = 19$

deci sistemul admite soluția unică $x=y=3$1p